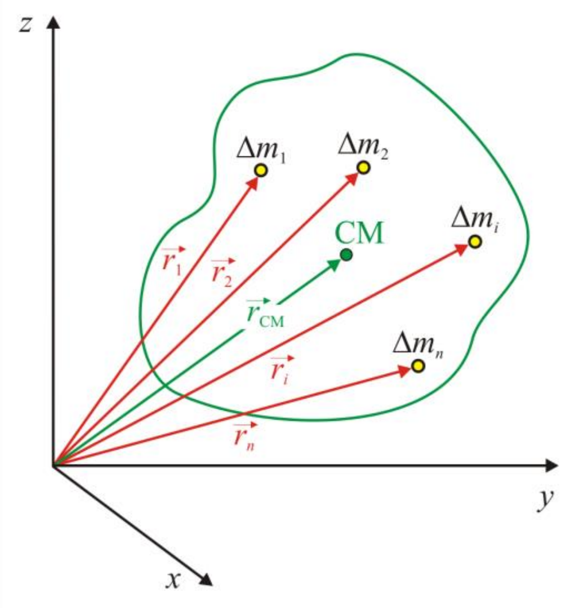
4. ДИНАМИКА КРУТОГ ТЕЛА

4.1. Центар масе

Круто тело масе m може да се представи као механички систем састављен од елементарних маса $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ чији су вектори положаја $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_i, \ldots, r_n$ (**слика 4.1**). Целокупна маса таквог система је у том случају дата формулом

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \, . \tag{4.1}$$



Слика 4.1

Центар масе тела дефинише се тада као геометријска тачка чији је вектор положаја одређен изразом

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \tag{4.2}$$

односно

$$m \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \, . \tag{4.3}$$

Диференцирањем формуле (4.3) по времену добија се

$$m \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} \, , \tag{4.4}$$

то јест

$$m \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \, , \tag{4.5}$$

где је $\vec{v}_{CM}$ брзина центра масе, док је $\vec{v}_i$ брзина елементарне масе Δm_i .

Диференцирањем израза (4.5) по времену следи

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}\,, \tag{4.6}$$

илити

$$m\,\vec{a}_{\mathrm{CM}}=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\vec{a}_i\,, \tag{4.7}$$

где је $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ убрзање центра масе, док је $\vec{a}_i$ убрзање елементарне масе m_i.

На основу другог Њутновог закона је

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\vec{a}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\vec{F}\,, \tag{4.8}$$

где је $\vec{F}$ резултанта спољашњих сила које делују на тело, док је сума унутрашњих сила једнака нули (**потпоглавље 3.6**).

У том случају може се писати

$$m\,\vec{a}_{\mathrm{CM}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\vec{F}\,. \tag{4.9}$$

Горња формула значи да се центар масе тела креће као материјална тачка чија је маса једнака укупној маси система, под дејством резултанте спољашњих сила које делују на систем (тело). Ако је кретање тела транслаторно, формула (4.9) у потпуности описује његово кретање, те се кретање тела своди на кретање материјалне тачке. Ако се тело креће криволинијски, онда се његово кретање разлаже на транслаторно кретање центра масе и ротационо кретање око центра масе као непокретне тачке.

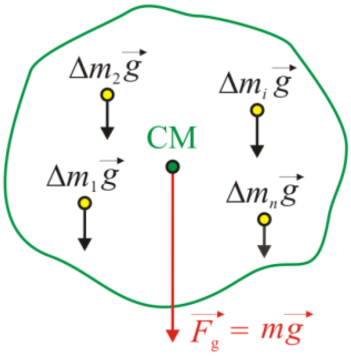
У случају да је тело изоловано ($\vec{F}=0$), из израза (4.8) следи да је

$$m\,\vec{a}_{\mathrm{CM}}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v}_{CM})}{\mathrm{d}t}=0\,, \tag{4.10}$$

одакле следи да је

$$m\vec{v}_{CM}=\mathrm{const.} \tag{4.11}$$

што значи да се центар масе изолованог тела креће равномерно праволинијски.



Слика 4.2

Центар масе тела поклапа се са тежиштем тела ако се тело налази у хомогеном гравитационом пољу. *Тежиште* тела је нападна тачка резултанте векторског збира гравитационих сила (сила теже) свих елементарних маса $m_i\vec{g}$ (**слика 4.2**)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{g} = \vec{g}\sum_{i=1}^{n} m_i = mg = \vec{F}_g . \qquad (4.12)$$

Тежиште симетричних и хомогених тела (лопта, ваљак, паралелопипед) налази се, наравно, у њиховом центру. У случају тела неправилног облика тежиште се одређује експериментално, вешањем тела у најмање две тачке, при чему тежиште лежи у пресеку вертикала повучених кроз тачке вешања (*тежишне линије*).

4.2. Динамика ротационог кретања крутог тела око непокретне осе

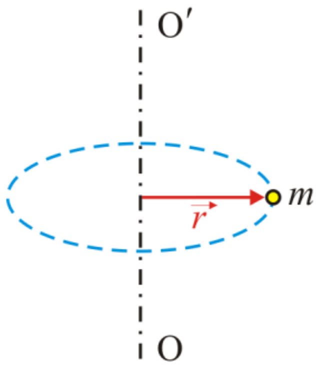
Најједноставнији облик ротационог кретања крутог тела јесу ротације око непокретне осе. Прво ће бити дефинисане одређене физичке величине неопходне за даља разматрања.

4.2.1. Момент инерције

Момент инерције I материјалне тачке у односу на непокретну осу OO' (**слика 4.3**) дефинише се на следећи начин

$$I = mr^2 , \qquad (4.13)$$

где је m маса материјалне тачке, док је r интензитет вектора положаја $\vec{r}$ материјалне тачке у односу на непокретну осу OO'.

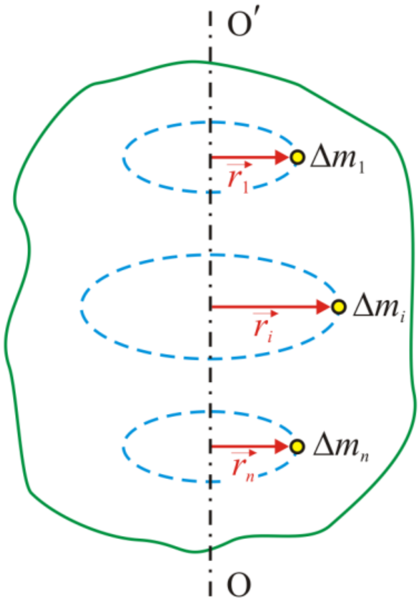


Слика 4.3

Момент инерције тела масе m у односу на непокретну осу OO' (**слика 4.4**) дефинише се као сума момената инерције елементарних маса тела

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 , \qquad (4.14)$$

где је r_i интензитет вектора положаја елементарне масе m_i у односу на непокретну осу $\mathrm{OO'}$. У случају да је распоред маса у телу *континуалан* (непрекидан), може се применити инфинитезимални рачун, те се момент инерције тела тада дефинише као



Слика 4.4

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int_0^m r^2 \mathrm{d}m\,, \tag{4.15}$$

где је r растојање инфинитезималног елемента масе $\mathrm{d}m$ од осе $\mathrm{OO'}$. На основу формуле (3.26) за густину, елемент масе може се писати као $\rho\,\mathrm{d}V$, где је $\mathrm{d}V$ инфинитезимални елемент запремине, те је онда момент инерције једнак

$$I = \int_0^V r^2 \rho\,\mathrm{d}V\,, \tag{4.16}$$

где се интеграљење врши по читавој запремини тела. За хомогена тела густина је константна, те може писати испред запреминског интеграла

$$I = \rho\int_0^V r^2 \mathrm{d}V\,. \tag{4.17}$$

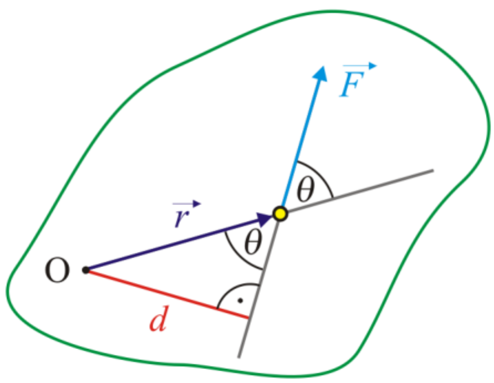
Применом формуле (4.17) може се показати да нпр. момент инерције хомогеног ваљка масе m, полупречника R и висине h износи $mR^2/2$, док момент инерције хомогене лопте масе m и полупречника R износи $2mR^2/5$.

4.2.2. Момент силе у односу на непокретну осу. Спрег сила.

Нека тело може да ротира око осе O која је нормална на раван цртежа (**слика 4.5**). Сила $\vec{F}$ (у равни цртежа) делује на тело у тачки A која је одређена вектором положаја $\vec{r}$ у односу на осу ротације. *Момент силе* $\vec{F}$ у односу на осу O јесте вектор $\vec{M}$, који је једнак

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \,. \qquad (4.18)$$

Он је нормалан на раван коју образују вектори $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а лежи на правцу осе ротације (баш као и вектори угаоне брзине $\vec{\omega}$ и убрзања $\vec{\alpha}$), док је његов смер одређен правилом десног завртња (на **слици 4.5** $\vec{M}$ је оријентисан ка посматрачу).



Слика 4.5

Интензитет момента силе једнак је

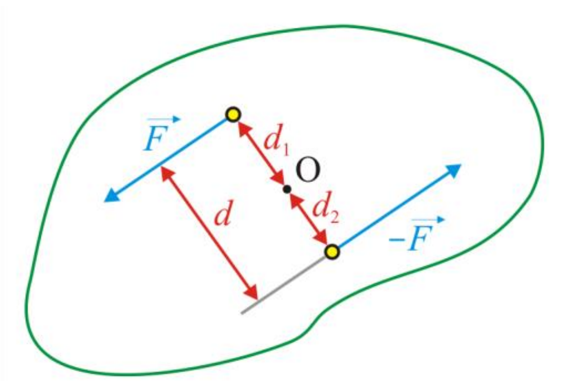
$$M = rF\sin\theta = Fd \,, \qquad (4.19)$$

пошто крак силе има облик: $d = r\sin\theta$.

Ако на тело делује n сила (у равнима које су нормалне на правац осе ротације), укупни момент силе једнак је векторском збиру појединачних момената силе

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times F_i \,, \qquad (4.20)$$

где је $\vec{r}_i$ вектор положаја нападне тачке силе $\vec{F}_i$.



Слика 4.6

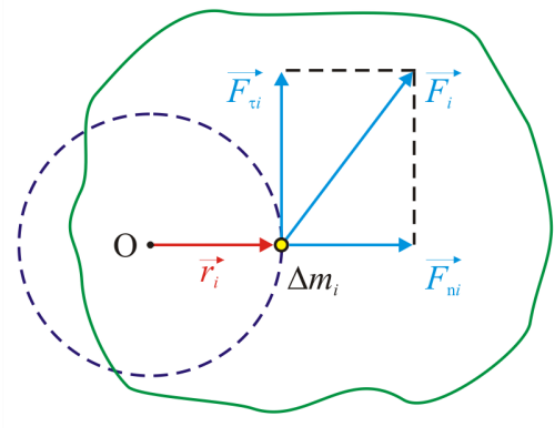
Две паралелне силе једнаких интензитета, а супротног смера, али које не делују дуж исте праве, представљају *спрег сила*. Момент спрега сила једнак је, на основу формуле (4.20), збиру момената једне $\vec{M}_1$ и друге силе $\vec{M}_2$ које образују спрег (**слика 4.6**). Он може бити одређен у односу на произвољну осу нормалну на раван у којој леже силе. Како обе силе леже у истој равни (на **слици 4.6** то би била раван цртежа), а обрћу тело у истом смеру, оба момента силе имају исти правац и смер, те је довољно сабрати им интензитете

$$M = M_1 + M_2 = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2) = Fd \,. \qquad (4.21)$$

Растојања d_1 и d_2 не јављају се у коначном резултату, што значи да је момент спрега сила једнак око свих оса нормалних на раван сила које образују спрег, а њихов интензитет одређен је производом интензитета F само једне од сила и нормалног растојања d између њихових линија деловања.

4.2.3. Основна једначина динамике ротационог кретања крутог тела око непокретне осе

Нека круто тело произвољног облика ротира око осе O нормалне на раван цртежа (**слика 4.7**) под дејством резултујуће спољашње силе $\vec{F}$. У општем случају, на тело могу деловати и спољашње силе које не леже у равнима нормалним на правац осе ротације. Међутим, само оне компоненте таквих сила које леже у равнима нормалним на правац осе ротације узрок су ротације тела око осе. Компоненте сила које су паралелне са осом (одговарајући моменти нормални су на осу ротације) теже да осу ротације помере. Моменти таквих сила надокнађени су одговарајућим моментима сила реакције који се јављају у тачкама учвршћења.



Слика 4.7

Нека се тело са **слике 4.7** састоји од елементарних маса Δm_1, Δm_2, …, Δm_i, …, Δm_n чији су вектори положаја $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_i$, ..., $\vec{r}_n$ у односу на осу ротације. Ако спољашња сила $\vec{F}_i$ (лежи у равни цртежа) делује на Δm_i, она се може разложити на компоненте: $\vec{F}_{\tau i}$ у правцу тангенте и $\vec{F}_{ni}$ у правцу вектора положаја (у правцу нормале на тангенту), односно

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{\tau i} + \dot{F}_{ni} . \tag{4.22}$$

На основу ове релације и дефиниционог израза (4.20) може се писати

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_{\tau i} + \vec{F}_{ni}) = \vec{r}_i \times F_{\tau i} + r_i \times F_{ni} = r_i \times F_{\tau i} , \tag{4.23}$$

пошто је $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ni} = 0$ (угао између $\vec{r}_i$ и $\vec{F}_{ni}$ је или нула или π). Компонента силе $\vec{F}_{\tau i}$ делује у правцу тангенте, дајући елементарној маси Δm_i угаоно убрзање $\vec{\alpha}$. Према другом Њутновом закону и изразу (2.16): $\vec{a}_{\tau i} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i$, та компонента силе биће

$$\vec{F}_{\tau i} = \Delta m_i \vec{a}_{\tau i} = \Delta m_i (\vec{\alpha} \times \bar{r}_i), \tag{4.24}$$

те је, према формулама (4.23) и (4.24)

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{\tau i} = \vec{r}_i \times \Delta m_i (\vec{\alpha} \times r_i). \tag{4.25}$$

Како је $\vec{\alpha} \perp \vec{r}_i$ и $\vec{r}_i \perp \vec{F}_{\tau i}$, интензитет момента силе $i-$те честице износи

$$M_i = r_i \Delta m_i \alpha \, r_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha. \tag{4.26}$$

Пошто $\vec{F}_{\tau i}$ лежи у равни цртежа (**слика 4.7**), онда, на основу (4.25), M_i има правац осе ротације са смером ка посматрачу, тј. правац и смер момента силе исти су као и правац и смер вектора $\vec{\alpha}$

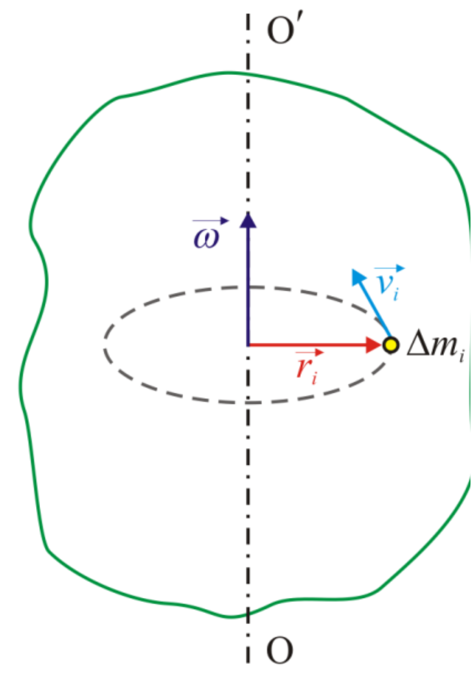
$$\vec{M}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\alpha}. \tag{4.27}$$

Сумирањем израза (4.27) по свим елементарним масама добија се укупни момент свих спољашњих сила

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \vec{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \right) \vec{\alpha} = I \alpha. \tag{4.28}$$

Горња формула (4.28) представља основну једначину динамике ротационог кретања крутог тела око непокретне осе и аналогна је другом Њутновом закону $\vec{F} = m\vec{a}$ за транслаторно кретање; момент силе $\vec{M}$ аналоган је сили $\vec{F}$, момент инерције I аналоган је маси m, док је угаоно убрзање $\vec{\alpha}$ аналогно убрзању $\vec{a}$.

4.2.4. Кинетичка енергија, рад и снага код ротационог кретања крутог тела око непокретне осе



Слика 4.8

Кинетичка енергија крутог тела масе m које ротира око непокретне осе угаоном брзином $\vec{\omega}$ (**слика 4.8**) једнака је суми кинетичких енергија свих елементарних маса Δm_i које се крећу различитим тангенцијалним брзинама $\vec{v}_i$ по кружним путањама вектора положаја $\vec{r}_i$

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (4.29)$$

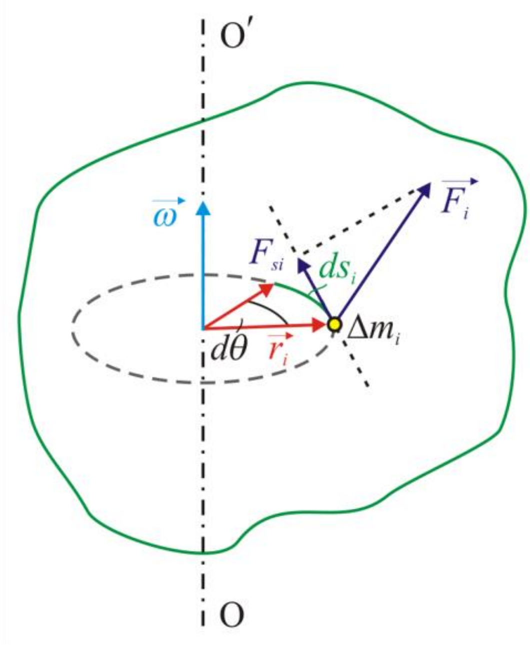
при чему је коришћена формула (2.12) за линеарну брзину: $v_i = r_i \omega$.

Сада ће бити одређен рад спољашњих сила при ротацији крутог тела око сталне осе OO' (**слика 4.9**). Нека на сваку елементарну масу тела Δm_i делује спољашња сила $\vec{F}_i$ која лежи у равни нормалној на правац осе ротације. За временски интервал Δt елементарна маса Δm_i прећи ће пут

$$\mathrm{d}s_i = r_i\,\mathrm{d}\theta, \quad (4.30)$$

те је рад спољашње силе $\vec{F}_i$ на путу $\mathrm{d}s_i$, према дефиницији (3.40)

$$\mathrm{d}A = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{s}_i = F_{si}\,\mathrm{d}s_i = F_{si}\, r_i\,\mathrm{d}\theta, \quad (4.31)$$



Слика 4.9

где је F_{si} пројекција силе $\vec{F}_i$ на правац пута $\mathrm{d}s_i$. Пошто је $F_{si}\, r_i = M_i$ интензитет момента силе у односу на осу ротације чији се правац поклапа са осом ротације, онда је

$$\mathrm{d}A_i = M_i\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{4.32}$$

Сумирањем формула облика (4.32) за све елементарне масе тела добија се рад свих спољашњих сила које делују на тело у временском интервалу Δt

$$\mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}A_i = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\sum_{i=1}^{n} M_i = M\,\mathrm{d}\theta\,, \tag{4.33}$$

где је M интензитет резултанте момената силе чији правци леже дуж осе ротације. При рачунању ове суме, сваки момент узима се као позитиван или негативан у зависности од тога да ли тежи да тело ротира у позитивном или у негативном смеру (за позитиван смер ротације узима се онај супротан кретању казаљке сата).

Укупан рад свих спољашњих сила за коначни угаони померај добија се интеграљењем формуле (4.33)

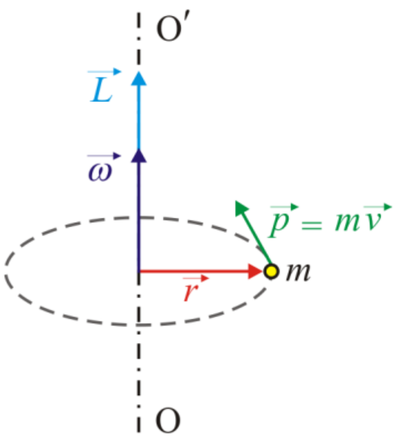
$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{4.34}$$

Снага тела које ротира око непокретне осе је, по дефиницији снаге (3.43)

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = M\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\,\omega\,, \tag{4.35}$$

пошто је, према (4.33), $\mathrm{d}A = M\,\mathrm{d}\theta$.

4.2.5. Момент импулса у односу на непокретну осу



Слика 4.10

Момент импулса материјалне тачке у односу на непокретну осу ротације OO′ (**слика 4.10**) дефинише се као

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}\,, \tag{4.36}$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја материјалне тачке у односу на осу ротације, док је $\vec{p}$ импулс материјалне тачке масе m, нормалан (као и брзина $\vec{v}$) на осу ротације.

Правац вектора $\vec{L}$ нормалан је на раван у којој леже $\vec{r}$ и $\vec{p}$, односно има правац осе ротације и смер десног завртња, те припада групи аксијалних вектора, баш као и вектор угаоне брзине $\vec{\omega}$.

У случају ротације крутог тела око непокретне осе $\mathrm{OO'}$ (**слика 4.11**), свака елементарна маса Δm_i, чији је положај у односу на осу ротације одређен вектором положаја $\vec{r}_i$ и чији је импулс $\vec{p}_i = \Delta m_i \vec{v}_i$, има свој момент импулса у односу на непокретну осу $\mathrm{OO'}$

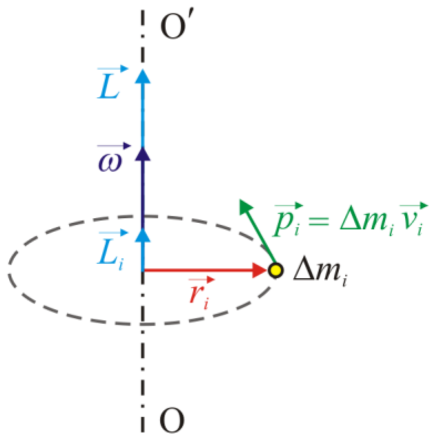
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i (\omega \times r_i), \quad (4.37)$$

где је $\vec{v}_i$ замењена на основу формуле (2.15). Како је $\vec{v}_i \perp \vec{r}_i$ и $\vec{\omega} \perp \vec{r}_i$, онда је интензитет момента импулса једнак

$$L_i = r_i \Delta m_i \, \omega r_i = \Delta m_i r_i^2 \, \omega, \qquad (4.38)$$

те се вектор $\vec{L}_i$ може представити као

$$\vec{L}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega}. \qquad (4.39)$$



Слика 4.11

Момент импулса тела као целине $\vec{L}$ у односу на непокретну осу $\mathrm{OO'}$ добија се сумирањем момената импулса $\vec{L}_i$ свих елементарних маса у односу на поменуту осу

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = I \omega. \qquad (4.40)$$

Формула (4.40) за момент импулса при ротацији аналогна је са изразом (3.1) за импулс тела при транслацији ($\vec{p} = m\vec{v}$).

Према формули (4.40), основна једначина динамике ротационог кретања око непокретне осе (4.28) гласи

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\vec{\omega})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}, \qquad (4.41)$$

и аналогна је са формулом (3.4) при транслаторном кретању.

Из израза (4.41), ако је $\vec{M} = 0$, следи да је

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const.}, \tag{4.42}$$

што је запис *закона одржања момента импулса* тела при ротацији тела око непокретне осе: »Ако је укупни момент свих спољашњих сила које делују на тело које ротира око непокретне осе једнак нули, тада је момент импулса тела у односу на поменуту осу константан.«

Пример овог закона био би нпр. човек који стоји на хоризонталном постољу које ротира око вертикалне осе. Ако човек у својим рукама држи масивне тегове, његов момент инерције I_1 биће већи када су му руке са теговима раширене од момента инерције I_2 када су му руке приљубљене уз тело. Према закону одржања момента импулса (4.42) биће

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \tag{4.43}$$

стога ће у првом случају угаона брзина постоља $\vec{\omega}_1$ бити мања него у другом случају, када износи $\vec{\omega}_2$.

Слично се дешава и са клизачицом на леду која ротира угаоном брзином $\vec{\omega}$. Она може своју угаону брзину повећати наглим спуштањем руку уз тело и приближавањем једне ноге другој (чиме смањује момент инерције свог тела). Ако жели да своју ротацију успори, она мора нагло да рашири руке и једну ногу избаци у страну (чиме повећава момент инерције, а смањује угаону брзину свог тела).